第 7 講・式の計算による証明

例題 1　整数に関する証明問題

ポイント

n を整数とすると

- 連続する整数 ： $\ldots$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$，$\ldots$
- 連続する偶数（ぐうすう） ： $\ldots$，$2n-2$，$2n$，$2n+2$，$2n+4$，$\ldots$
- 連続する奇数（きすう） ： $\ldots$，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$，$2n+5$，$\ldots$

問題

連続する 3 つの整数がある。中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は，残りの 2 数の積に等しいことを証明しなさい。

解答

3 つの連続する整数は，整数 n を使って

$$n,\ n+1,\ n+2$$

と表せる。このとき，中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は

$$\begin{aligned}&(n+1)^2-1\\ =\ &n^2+2n+1-1\\ =\ &n^2+2n\\ =\ &n(n+2)\end{aligned}$$

これは中央の数以外の 2 数の積に等しい。したがって，中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は，残りの 2 数の積に等しい。**（証明終）**

MEMO

確認テスト 1

連続する 3 つの整数がある。中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は，残りの 2 数の積に等しいことを次のように証明したい。このとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。

【証明】

3 つの連続する整数は，整数 n を使って

(1)

と表せる。このとき，中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は

$\left(\boxed{(2)} \right)^2 - 1$

これを計算すると (3) となり，中央の数以外の 2 数の積に等しい。したがって，中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は，残りの 2 数の積に等しい。**（証明終）**

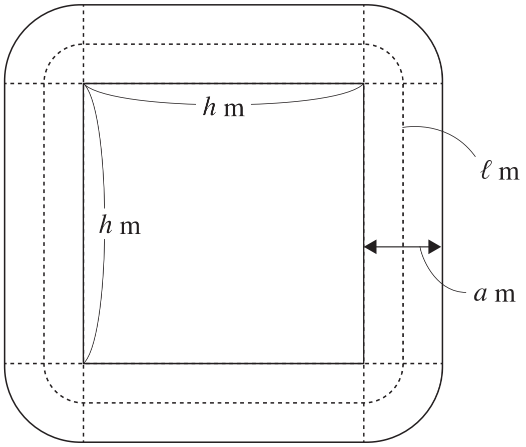
例題 2　道幅に関する証明問題

問題

右の図のような 1 辺の長さが h m の正方形の土地の周囲に，幅 a m の道があります。この道の真ん中を通る線の長さを ℓ m，この道の面積を S m^2 とするとき

$S = a\ell$

となることを証明しなさい。

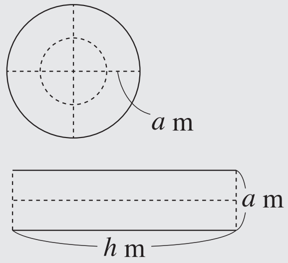


ポイント

- 道のうち，四つ角の部分をつなぎ合わせると半径 a m の円になる。また，四つ角以外の部分は横 h m，縦 a m の長方形 4 つに分けられる。このことを利用して S，ℓ をそれぞれ a，h の式で表し

  $S = a\ell$

  となることを証明する。



解答

道のうち，四つ角の部分をつなぎ合わせると円になり，それ以外の部分は長方形 4 つに分けられる。

よって，道の面積は

$S = \pi a^2 + 4 \times h \times a$

$= \pi a^2 + 4ha$　・・・①

一方，道の真ん中を通る線の長さは

$\ell = 2\pi \times \frac{1}{2}a + 4 \times h$

$= \pi a + 4h$

となる。この式の両辺に a をかけて

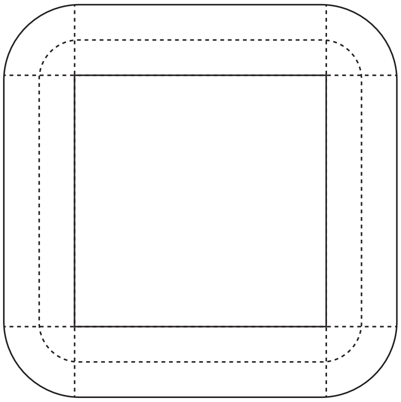
$a\ell = a(\pi a + 4h)$

$= \pi a^2 + 4ha$　・・・②

①，②より

$S = a\ell$　**（証明終）**

MEMO

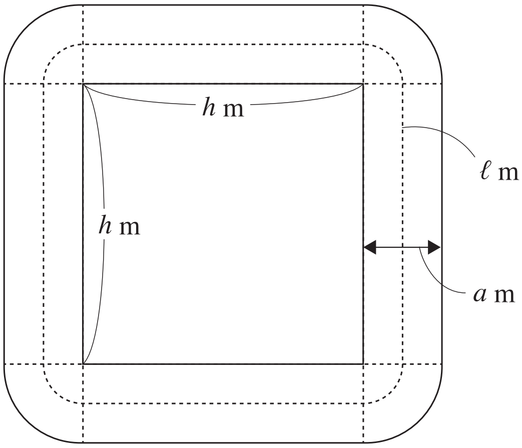


確認テスト 2

右の図のような 1 辺の長さが h m の正方形の土地の周囲に，幅 a m の道があります。この道の真ん中を通る線の長さを ℓ m，この道の面積を S m^2 とするとき

$S = a\ell$

となることを次のように証明したい。このとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。



【証明】

道の面積は

$S =$ (1)　・・・①

一方，道の真ん中を通る線の長さは

$\ell =$ (2)

となる。この式の両辺に a をかけて

$a\ell =$ (3)　・・・②

①，②より

$S = a\ell$　**（証明終）**

[メモ]